

文章编号: 1000-8055(2005)02-0245-05

# 疲劳裂纹扩展参数的寿命反推方法

鲍蕊, 张建宇, 王传胜, 费斌军

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 为解决腐蚀疲劳条件下无法由断口判读获得 $(a, N)$ 数据集以确定裂纹扩展公式参数的问题, 提出了确定疲劳裂纹扩展参数的寿命反推方法。通过与用 $(a, N)$ 数据集全部数据拟合结果的比较, 证明该方法在指数 $b=1$ 的情况下适用, 而在 $b \neq 1$ 时偏差较大; 指定破坏概率的载荷循环数和裂纹长度的比较结果, 说明该方法的结果可用于概率损伤容限分析。

**关键词:** 航空、航天推进系统; 裂纹扩展; 疲劳寿命; 腐蚀疲劳; 参数估计

**中图分类号:** V 215. 7; O 346. 2

**文献标识码:** A

## Method for Determining Crack Growth Parameters Using Fatigue Life

BAO Rui, ZHANG Jian-yu, WANG Chuan-sheng, FEI Bin-jun

(School of Aeronautic Science and Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Since the  $(a, N)$  databank can not be easily obtained in corrosion fatigue, the method for determine the parameters of crack growth parameters in terms of fatigue life is presented. Via results comparison, the method shows its good capability under the general condition of  $b=1$ . The small relative error of the estimation of crack length and number of load cycles for given damage probability proves that the method given in this paper can be used in probability damage tolerance analysis.

**Key words:** aerospace propulsion system; crack growth; fatigue life; corrosion fatigue; parameter estimation

进行结构件的概率损伤容限分析, 通常采用剩余强度干涉模型或裂纹扩展寿命干涉模型, 这都需要建立裂纹扩展某一时刻(特别是裂纹稳定扩展至断裂前某时刻)的裂纹尺寸分布。通常建立裂纹尺寸分布的方法是假定裂纹扩展寿命服从某一概率分布, 由疲劳试验获得的裂纹扩展 $(a, t)$ 或 $(a, N)$ 数据集估算相应裂纹扩展公式的参数及概率分布参数, 进而获得指定时间 $t$ 或指定载荷循环数 $N$ 的裂纹尺寸的分布函数。

一般环境条件下的疲劳试验, 可通过降载勾线等方法在断口上记录下一系列的裂纹扩展位置, 通过断口判读, 可以得到指定载荷循环数 $N_i$ 对应的裂纹长度 $a_i$ 。但是, 在腐蚀疲劳试验中, 由于腐蚀液的作用, 无法通过降载在断口上记录下相应的裂纹长度, 但一般可以捕捉到出现可检裂纹和断裂时的循环数 $(N_0, N_i)$ 及其对应的裂纹长度 $(a_0, a_i)$ 。

由裂纹扩展公式能得到裂纹扩展到一定长度

收稿日期: 2004-03-13; 修订日期: 2004-05-19

作者简介: 鲍蕊(1978-), 女, 蒙古族, 内蒙古呼伦贝尔人, 北京航空航天大学航空宇航科学技术流动站博士后, 主要从事结构疲劳断裂可靠性研究

对应的扩展寿命,该寿命是裂纹扩展公式参数的函数,因而由出现裂纹及断裂时的裂纹长度及对应寿命增量,可以反推得到裂纹扩展公式的参数。本文将建立由裂纹起始及失稳断裂时裂纹长度及对应寿命反推裂纹扩展公式的参数方法,并通过实例验证方法的可行性。

## 1 用(a, N)数据集确定裂纹扩展参数的方法

### 1.1 裂纹扩展公式

疲劳裂纹扩展一般分为3个阶段,通常讨论较多的是亚临界扩展阶段,这一阶段是裂纹的稳定扩展阶段。一般可以认为,在谱载荷下亚临界扩展阶

段的裂纹扩展速率可表述为<sup>[1]</sup>:

$$da/dN = Q a^b \quad (1)$$

式中:  $Q, b$  为裂纹扩展速率参数,与材料及载荷谱有关。

考虑裂纹扩展的统计变异性及工程应用的安全性,随机裂纹扩展公式可采用随机变量模型将确定性裂纹扩展公式随机化得到<sup>[2]</sup>。

$$da/dN = X Q a^b \quad (2)$$

式中,  $X$  是中值为1的随机变量。

设任意两个时刻( $t_1, t_2$ )对应的裂纹长度为( $a_1, a_2$ ),载荷循环数为( $N_1, N_2$ ),则:

$$\int_1^2 \frac{1}{Q} a^{-b} da = \int_1^2 dN \quad (3)$$

积分得:

$$\left. \begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1-b} \cdot (a_2^{1-b} - a_1^{1-b}) & (b \neq 1) \\ N_2 - N_1 &= \frac{1}{Q} \cdot \ln \frac{a_2}{a_1} & (b = 1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 1.2 用(a, N)数据集确定Q, b, X的方法

设一个(a, N)数据集包含L个应力水平,第i个应力水平下有n个断口,其中第k个断口有m组(a, N)数据。

对于 $b=1$ 的情况,采用最小二乘法令偏差平方和最小,可得<sup>[3]</sup>:

$$Q_k = \frac{m \sum_{j=1}^m N_j \ln a_j - \sum_{j=1}^m \ln a_j \sum_{j=1}^m N_j}{m \sum_{j=1}^m N_j^2 - \left( \sum_{j=1}^m N_j \right)^2} \quad (5)$$

对于 $b \neq 1$ 的情况,根据(4)式定义偏差平方和 $\epsilon_k$ :

$$\epsilon_k = \sum_{i=1}^m \left\{ (N_{i+1} - N_i) - \frac{1}{Q_k} \cdot \frac{1}{1-b_k} \cdot [a_{i+1}^{1-b_k} - a_i^{1-b_k}] \right\}^2 \quad (6)$$

取 $\epsilon_k$ 对于 $Q_k, b_k$ 的偏导数,并令它们等于0,求得使 $\epsilon_k$ 最小的 $Q_k, b_k$ 的。

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial Q_k} = 0 \quad \frac{\partial \epsilon_k}{\partial b_k} = 0 \quad (7)$$

取同一应力水平下各个断口的 $Q_k, b_k$ 的平均值作为该应力水平下的 $Q, b$ 值:

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_k \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \quad (8)$$

根据工程经验,通常设 $X$ 服从对数正态分布,令:

$$Z = \ln X \quad (9)$$

则 $Z$ 服从正态分布 $N(0, \sigma_Z)$ ,  $\sigma_Z$ 为 $X$ 的对数标准差:

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( \frac{Q_k}{Q} \right) \right]^2} \quad (10)$$

$$X \text{ 的概率密度函数为: } f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z X}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln X}{\sigma_Z} \right)^2 \right] \quad (11)$$

## 2 裂纹扩展参数的寿命反推方法

设观察到可检裂纹时循环数为 $N_0$ ,裂纹长度为 $a_0$ ,裂纹稳定扩展至断裂前的循环数为 $N_s$ ,裂纹长度为

$a_i$ , (4) 式改写为:

$$\left. \begin{aligned} N_i - N_0 &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1-b} \cdot (a_i^{1-b} - a_0^{1-b}) & (b \neq 1) \\ N_i - N_0 &= \frac{1}{Q} \cdot \ln \frac{a_i}{a_0} & (b = 1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对于  $b=1$  的情况, 由应力水平  $i$  下第  $k$  个试件的试验数据得:

$$Q_k = \frac{\ln (a_i)_k / (a_0)_k}{(N_i)_k - (N_0)_k} \quad (13)$$

该应力水平下的  $Q$  值取该应力水平下所有  $n$  个试件的  $Q_k$  的平均值.

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_k \quad (14)$$

对于  $b \neq 1$  的情况, 用极大似然法来估计  $Q$  和  $b$  的值.

对于同一应力水平下的  $n$  个试件, 类似 (6) 式定义:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \left\{ [(N_i)_i - (N_0)_i] - \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1-b} \cdot [(a_i)_i^{1-b} - (a_0)_i^{1-b}] \right\}^2 \quad (15)$$

同样, 解下面的方程组, 得到的使  $\epsilon$  最小的  $Q, b$  即为所求.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial Q} = 0 \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 0 \quad (16)$$

$X$  的对数标准差:

$$\hat{\sigma}_Z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^2}{n-1}} \quad (17)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} z_i &= \ln \left[ \frac{1}{Q} \cdot \frac{\ln (a_i)_i / (a_0)_i}{(N_i)_i - (N_0)_i} \right] & (b = 1) \\ z_i &= \ln \left[ \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1-b} \cdot \frac{(a_i)_i^{1-b} - (a_0)_i^{1-b}}{(N_i)_i - (N_0)_i} \right] & (b \neq 1) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$X$  的概率密度函数如 (11) 式所示.

3 计算结果比较

3.1 两种方法确定的  $Q, b, \sigma_Z$  值的比较

下面以  $\times \times$  机试验断口数据为例, 比较用  $(a, N)$  全部数据与用寿命反推方法所确定的裂纹扩展速率参数值. 全部数据均来自参考文献[4].

表1  $b=1$  时两种方法计算结果的比较

Table 1 Comparison of the results ( $b=1$ )

|               | ( $a, N$ ) 全部数据计算结果 | 寿命反推方法计算结果 | 相对误差    |
|---------------|---------------------|------------|---------|
| $Q_1$         | 0.000 893           | 0.000 818  | 0.084   |
| $Q_2$         | 0.001 18            | 0.001 20   | 0.017   |
| $Q_3$         | 0.001 34            | 0.001 36   | 0.018   |
| $\sigma_{Z1}$ | 0.295               | 0.295      | 0.001 3 |
| $\sigma_{Z2}$ | 0.144               | 0.137      | 0.048   |
| $\sigma_{Z3}$ | 0.311               | 0.281      | 0.096   |

根据该类结构件损伤容限分析的状况, 取裂纹长度  $a$  在 0.8~3.0 mm 段的  $(a, N)$  数据进行分析, 每个  $(a, N)$  数据集有 3 组应力水平下的试验数据. 寿命反推方法取数据集中最接近 0.8 mm 的裂纹长度数据作为捕捉到可检裂纹时的裂纹长度值, 取数据集中最接近 3.0 mm 的裂纹长度数据作为稳定扩展至断裂前的裂纹长度. 分别用  $(a, N)$  数据集的全部数据和寿命反推方法确定  $Q, b$  的值及  $X$  的对数标准差, 计算和比较结果见表 1~ 表 3. 表中  $Q_i, b_i, \sigma_{Zi}$  分别表示第  $i$  个应力水平下的  $Q, b$  值及  $X$  的对数标准差.

$$\text{相对误差} = |(D_T - D_L) / D_T|$$

其中:  $D_T$  表示用  $(a, N)$  数据集全部数据进行计算的结果,  $D_L$  表示寿命反推方法的计算结果.

3.2 讨 论

从表 2 可以看出,  $b \neq 1$  时两种方法的计算结果偏差较大. 图 1 给出了按照寿命反推方法所得结果绘制的  $a - \Delta N$  曲线.

表2  $b \neq 1$  时两种方法计算结果的比较  
Table 2 Comparison of the results ( $b \neq 1$ )

|            | ( $a, N$ ) 全部数据计算结果 | 寿命反推方法计算结果 | 相对误差    |
|------------|---------------------|------------|---------|
| $Q_1$      | 0.001 01            | 0.002 00   | 0.985   |
| $b_1$      | 0.790               | - 0.721    | 1.91    |
| $Q_2$      | 0.001 15            | 0.001 51   | 0.307   |
| $b_2$      | 1.198               | 0.509      | 0.575   |
| $Q_3$      | 0.001 42            | 0.000 53   | 0.627   |
| $b_3$      | 1.099               | 5.776      | 4.26    |
| $\alpha_1$ | 0.280               | 0.286      | 0.021 4 |
| $\alpha_2$ | 0.240               | 0.129      | 0.462   |
| $\alpha_3$ | 0.374               | 0.181      | 0.516   |

表3  $b \neq 1$  时两种方法计算结果的比较  
( $b$  采用全部数据的计算结果)  
Table 3 Compare of the results  
( $b$  is obtained from the all data)

|            | ( $a, N$ ) 全部数据计算结果 | 寿命反推方法计算结果 | 相对误差  |
|------------|---------------------|------------|-------|
| $b_1$      | 0.790               | 0.790      |       |
| $Q_1$      | 0.001 01            | 0.000 840  | 0.164 |
| $b_2$      | 1.198               | 1.198      |       |
| $Q_2$      | 0.001 15            | 0.001 09   | 0.052 |
| $b_3$      | 1.099               | 1.099      |       |
| $Q_3$      | 0.001 42            | 0.001 18   | 0.172 |
| $\alpha_1$ | 0.280               | 0.295      | 0.054 |
| $\alpha_2$ | 0.240               | 0.138      | 0.425 |
| $\alpha_3$ | 0.374               | 0.292      | 0.208 |

从图1 可以看出,  $b \neq 1$  时由寿命反推方法得到的  $b$  值并不合理:  $b$  太小不符合随着裂纹长度的增加裂纹扩展加快的事实,  $b$  太大反映的则不是裂纹稳定扩展阶段的裂纹扩展规律。造成  $b$  的计算结果不合理的原因是由一个试件的试验结果代入(4)式只有一个方程, 但包含  $Q, b$  两个待定参数, 同一应力水平下的  $n$  个试件的试验结果进行计算时, 由于  $\Delta N$  的分散性很大, 由(15)式定义的误差, 在  $b < 0$  时取得最小值, 而在  $b \approx 1$  和  $b \gg 1$  时相差不多。这样确定的  $b$  显然不符合实际情况。如图2 所示。

$b$  的取值对  $Q$  值的确定有很大影响, 因而表2 中两种方法确定的  $Q$  值也有较大的差别。当  $b$  值一定(即采用由全部数据计算的  $b$  值)时, 两种方法计算的  $Q$  值的差别不大, 如表3 所示。

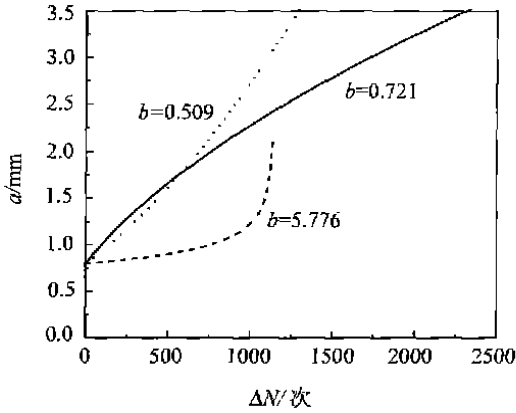


图1  $a-\Delta N$  曲线  
Fig 1 Curve of  $a-\Delta N$

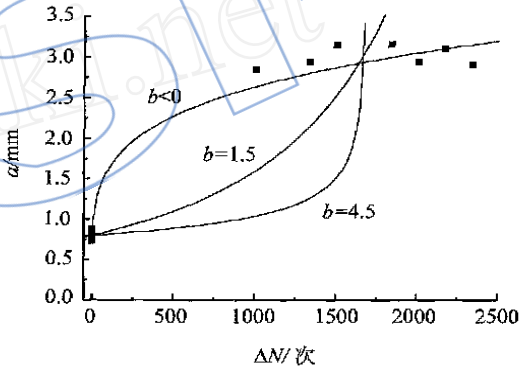


图2 不同  $b$  值拟合的情况  
Fig 2 Fit curves of different  $b$

根据上面的分析, 只有  $b$  的值在1 附近, (1) 式反映的裂纹扩展速率才符合裂纹稳定扩展阶段的特征, 表2 中由全部数据计算的  $b$  值也接近1。

表1 的数据说明, 当  $b=1$  时, 由寿命反推方法确定的  $Q$  和  $\alpha$  值与用全部数据确定的相差很小。故可用寿命反推的方法确定裂纹扩展公式的参数。

3.3 两种方法可靠度分析的比较

确定裂纹扩展公式参数的目的是确定裂纹扩展一定时间后, 裂纹长度超越某一指定长度的概率, 这也是进行概率损伤容限分析的基础。

上面的分析表明, 在通常损伤容限分析的范围内, 可以取  $b=1$ 。由(2)式并设  $N_0=0$  得:

$$a = a_0 e^{x_{QN}} \tag{19}$$

由(19)式和(11)式得:

$$f(a|a_0,N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_xa\ln(a/a_0)}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(\ln(a/a_0))-\ln(QN)}{\sigma_x}\right]^2\right\}$$

(20)

根据表 1 中两种方法的计算结果可绘制两种方法得到的指定载荷循环数  $N$  的裂纹长度的概率密度函数, 如图 3 所示(图中取  $N = 1000$ )。图中实线为由全部数据计算结果确定的  $a$  的概率密度, 虚线为由寿命反推方法计算结果确定的  $a$  的概率密度。

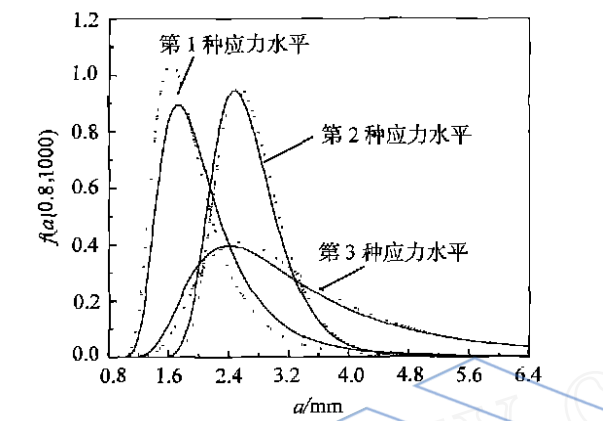


图3 两种方法得到的  $a$  的概率密度函数的比较  
Fig. 3 Comparison of the probability density function of crack length  $a$

表4 两种方法所得指定破坏概率的载荷循环数和裂纹长度的比较

| Table 4 Comparison of the load cycles and crack length at certain damage probability |      |           |       |            |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|-------|------------|-------|
| 应力水平                                                                                 | 方法   | $P = 0.1$ |       | $P = 0.05$ |       |
|                                                                                      |      | $N$       | $a$   | $N$        | $a$   |
| 1                                                                                    | 全部数据 | 1 015     | 1.980 | 910        | 1.803 |
|                                                                                      | 寿命反推 | 1 108     | 1.980 | 995        | 1.805 |
|                                                                                      | 相对误差 | 0.092     | 0.000 | 0.093      | 0.001 |
| 2                                                                                    | 全部数据 | 931       | 2.400 | 884        | 2.270 |
|                                                                                      | 寿命反推 | 924       | 2.425 | 879        | 2.297 |
|                                                                                      | 相对误差 | 0.008     | 0.010 | 0.006      | 0.012 |
| 3                                                                                    | 全部数据 | 662       | 1.942 | 592        | 1.769 |
|                                                                                      | 寿命反推 | 678       | 2.012 | 612        | 1.839 |
|                                                                                      | 相对误差 | 0.024     | 0.036 | 0.034      | 0.039 |

表 4 给出了临界裂纹长度  $a_c = 3.0$  时, 指定破坏概率为  $P = 0.1$  和  $P = 0.05$  时, 裂纹分别按照由全部  $(a, N)$  数据和寿命反推两种方法确定的  $Q$  值及  $X$  的对数方差扩展至  $a_c$  所经历的载荷循环数  $N$ , 以及裂纹经历  $N$  次载荷循环所达到的裂纹长度的中值  $a$ , 并给出了两种方法所得计算结果的相对误差。从表 4 的数据可以看出, 两种方法所得计算结果的差别不大。

4 结 论

- 通过以上分析可以得到如下结论:
- (1) 对于航空结构中经常采用的铝合金和结构钢, 在通常概率损伤研究的范围内, 裂纹扩展速率较慢, 裂纹扩展公式的指数  $b$  可取 1, 此时可以用寿命反推方法得到的确定性裂纹扩展公式的参数  $Q$  及随机裂纹扩展公式参数  $X$  的对数标准差。
  - (2) 由寿命反推方法和用完全  $(a, N)$  数据估算方法得到的指定破坏概率的裂纹扩展寿命值相差很小, 可以用寿命反推方法的计算结果进行概率损伤容限分析。
  - (3) 由于寿命反推方法所利用的试验数据很少, 所以在  $b \neq 1$  的情况下, 所得计算结果与完全数据的结果偏差较大。

参考文献:

[1] Yang J N, Manning S D. Handbook of Reliability Design for Air Force[M]. AFFD Systems Engineering Press, 1991.

[2] 张建宇. 概率断裂力学的理论与应用研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2000.

[3] 刘文, 郑仲, 费斌军. 概率断裂力学与概率损伤容限/耐久性[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999.

Liu Wenting, Zheng Minzhong, Fei Binjun. Probability Fracture Mechanics and Probability Damage Tolerance/Durability [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1999(in Chinese).

[4] 中国航空研究院. 损伤容限、耐久性设计手册[M]. 北京: 中国航空研究院, 1994.

Institute of Aeronautics China Handbook of Damage Tolerance and Durability Design [M]. Beijing: Institute of Aeronautics China 1994(in Chinese).

[5] 吴学仁. 飞机结构金属材料力学性能手册(第二卷)损伤容限[M]. 北京: 航空工业出版社, 1996.

WU Xueren. Handbook of Mechanical Properties of Aircraft Structural Metals Vol. 2 Damage Tolerance [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 1996(in Chinese).

[6] 王荣. 金属材料的腐蚀疲劳[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2001.

WANG Rong. Corrosion Fatigue of Metals [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2001.